Was muss auf den Spicker?

**LP in Grundform (GF)**

* Aus der Textaufgabe
  + Bestimmen der Strukturvariablen
  + Bestimmen der Restriktionswerte
  + Schreiben der Ungleichungen <= zu den Restriktionen
  + Schreiben der Zielfunktion Z
* Bestimmen des gültigen Bereichs aus den Ungleichungen (<=) zu den Restriktionen
* Bestimmen der Steigung m und des Achsenabschnitts aus der Ziel-Funktion Z
* Zeichnen der Iso-Zielwert-Geraden und bestimmen der Schnittpunkte anhand der berechneten Eckpunkte (x, y) in das 2D-Diagramm
* Bestimmen des zulässigen Bereichs im 2D-Diagramm
* Verschieben der Iso-Zielwert-Geraden im 2D-Diagramm bis zur optimalen Lösung
* Umformen einer Gleichung zu einer Restriktion in eine Ungleichung <=
* Umformen einer Ungleichung >= zu einer Restriktion in eine Ungleichung <=
* In der Tabelle zur LP in GF
  + Berechnen der Eckpunkte
  + Bestimmen der Gültigkeit bezgl. der Restriktionen
  + Berechnen des Zielfunktionswertes
  + Ermitteln der optimalen Lösung

**LP in Normalform (NF)**

* Umformen einer LP in GF in eine LP in Normalform
* Umstellen nach der Schlupfvariablen ym in den Gleichungen zur NF
* Aus der Textaufgabe
  + Bestimmen der Strukturvariablen
  + Bestimmen der Restriktionswerte
  + Schreiben der Gleichungen zu den Restriktionen
  + Schreiben der Zielfunktion Z
* In der Tabelle zur LP in GF
  + Berechnen der Eckpunkte
  + Berechnen des Schlupfes
  + Bestimmen der Gültigkeit bezgl. der Restriktionen
  + Berechnen des Zielfunktionswertes
  + Ermitteln der optimalen Lösung

**Simplex-Algorithmus**

* Vorgehen zum Umstellen der Schlupfvariablen als Basisvariablen
* Ermitteln der Eintrittsvariablen
* Ermitteln der Austrittsvariablen durch Tausch der Eintrittsvariablen mit Austrittsvariablen und Einsetzen der neuen Eintrittsvariablen in den Gleichungen zu den Restriktionen
* Aufstellen der Zielfunktion

**Simplex-Algorithmus tabellarische Lösung**

* Vorgehen zum Erstellen der Ausgangstabelle
* Vorgehen zum Eintragen der x-Werte aus der Z-Funktion für die Z-Zeile in die Ausgangstabelle 0

Z-Zeile in der Ausgangstabelle:

Lösungswert = 0

Werte der x-Variablen sind negativ (- Vorzeichen)

* Vorgehen zum Eintragen der Restriktionswerte (= Werte der Schlupfvariablen y) und der dazugehörigen x-Werte für jede Restriktion in die Ausgangstabelle

Übernahme der Restriktionswerte und der Werte zu den x-Variablen unverändert aus der Grundform der primalen LP

* **Ermitteln der Eintrittsvariablen (= Pivotspalte) anhand des größten negativen Werts (bzw. kleinsten Werts) zu jeder x-Variablen**
* **Ermitteln der Austrittsvariablen y (= Pivotzeile) durch Ermitteln des kleinsten Theta-Werts** aus der Division des Werts aus der Lösungsspalte (Spalte 0) durch den Wert der x-Variablen (NBV) zur gewählten x-Variablen (Pivotspalte)  
  **ACHTUNG:  
  Zur Z-Zeile wird kein Theta-Wert berechnet!**
* Tausch der NBV x aus der Pivotspalte gg. BV y aus der Pivotzeile
* Ermitteln des Pivotwerts aus Pivotspalte und Pivotzeile
* Füllen der Pivotzeile (Kehrwert zum Pivotwert, Division der Zellenwerte aus der Pivotzeile durch ursprünglichen Pivotwert
* Füllen der Pivotspalte (Division der Zellenwerte aus Pivotspalte durch ursprünglichen Pivotwert \* (-1)
* Füllen der übrigen Zellen in der Tabelle durch   
  Zellenwert – (Wert Pivotzeile aus Zellenspalte \* Wert Pivotspalte aus Zellenzeile : ursprünglichen Pivotwert)
* 2. Iteration, wenn ein Zellenwert aus der Z-Zeile noch negativ (< 0 )  
  Das Verfahren ist beendet, wenn ALLE Werte aus der Z-Zeile positiv (>=0) sind
* 2. Iteration wird wie die 1. Iteration durchgeführt
  + **Auswahl Pivotspalte (Eintrittsvariable) mit dem größten negativen Wert**
  + **Auswahl Pivotzeile (Austrittsvariable) mit dem kleinsten Theta-Wert**
  + Bestimmen de Pivotwerts
  + Tausch NBV (x-Variable) gg. BV (y-Variable)
  + Kehrwert zum Pivotwert
  + Füllen der Pivotzeile (Zellenwert aus PZ : Pivotwert)
  + Füllen der Pivotspalte (Zellenwert aus PS : Pivotwert \* (-1))
  + Füllen der übrigen Zellen
* 3. Iteration, wenn ein Zellenwert aus der Z-Zeile noch negativ (< 0 )  
  Das Verfahren ist beendet, wenn ALLE Werte aus der Z-Zeile positiv (>=0) sind
* Ablesen der x-Werte und des Z-Wertes aus der Lösungsspalte (Spalte 0)
* Lösungssatz formulieren (alle Variablen mit \*)  
  „Die optimale Lösung ist x1\* = , x2\* = , Z\* =

**Dualer Simplex-Algorithmus-Schritt**

* Aufgabenblatt 6
* **Duale LP bestimmen**
  + Primale LP in Grundform ist Ausgangsproblem
  + Duale LP wird nach den Schlupfvariablen y umgestellt
  + Wenn Z-Funktion in primaler LP eine Max-Funktion 🡆 dann Z-Funktion in dualer LP eine Min-Funktion
  + Wenn Z-Funktion in primaler LP eine Min-Funktion 🡆 dann Z-Funktion in dualer LP eine Max-Funktion
  + In der dualen LP werden aus x-Variablen y-Variablen
  + Funktionsparameter in Z-Funktion der dualen LP sind die y-Variablen zu JEDER Restriktion der primalen LP (hat die primale LP 3 Restriktionen 🡆 dann hat die Z-Funktion der dualen LP 3 y-Variablen, hat die primale LP 2 Restriktionen 🡆 dann hat die Z-Funktion der dualen LP 2 y-Variablen
  + Koeffizienten in der Z-Funktion der dualen LP sind die Restriktionswerte aus den Restriktionen der primalen LP
  + Jede x-Variable aus den Restriktionen der primalen LP steht für eine Restriktion in der dualen LP (die Restriktionen der primalen LP werden in der dualen LP transponiert)
  + Koeffizienten in jeweils einer Restriktion der dualen LP sind die Koeffizienten der dazugehörigen x-Variablen aus allen Restriktionen der primalen LP (die Restriktionen der primalen LP werden in der dualen LP transponiert 🡆 die x-Variablen aus der Spalte zu jeder primalen Restriktion werden in jeweils eine Restriktions-Zeile der dualen LP übernommen 🡆 x1 -Variablen aus ALLEN Restriktionen der primalen LP werden in die 1. Restriktion, x2 -Variablen aus ALLEN Restriktionen der primalen LP werden in die 2. Restriktion, x3 -Variablen aus ALLEN Restriktionen der primalen LP werden in die 3. Restriktion der dualen LP übernommen 🡆 jede x-Variable aus der primalen LP = eine Restriktion in der dualen LP  
    **ACHTUNG:  
    Vorzeichen zu den x-Variablen aus den Restriktionen der primalen LP übernehmen**
  + Restriktionswerte sind die Koeffizienten aus der Z-Funktion der primalen LP
  + **Der Vergleichs-Operator aus den Restriktionen der primalen LP ändert sich von <= in >=**
  + Bsp.:

primale LP

max Z(x1, x2) = 10x1 + 2x2

Unter den Bedingungen

4x1 + x2 <= 10 Restriktion 1

2x1 + x2 <= 8 Restriktion 2

x2 <= 3 Restriktion 3

x1, x2 >= 0

duale LP

min ZD(y1, y2) = 10y1 + 8y2 + 3y2

Unter den Bedingungen

4y1 + 2y2 >= 10 Restriktion 1

1y1 + 1y2 + 1y3 >= 2 Restriktion 2

y1, y2 >= 0

* Sonderfälle
  + Wenn eine Restriktion im primalen LP eine Gleichung ist 🡆 dann ist die dazugehörige y-Variable Element reeller Zahlen   
      
    Bsp.:

primale LP

max Z(x1, x2) = 3x1 + 2x2 + x3

Unter den Bedingungen

x1 + 2x2 - x3 <= 4 Restriktion 1

2x1 - x2 + x3 **=** 8 Restriktion 2

x1 - x2 <= 6 Restriktion 3

x1, x2, x3 >= 0

duale LP

min ZD(y1, y2, y3) = 4y1 + 8y2 + 6y3

Unter den Bedingungen

1y1 + 2y2 +1y3 **>=** 3 Restriktion 1

2y1 - 1y2 – 1y3 **>=** 2 Restriktion 2

-1y1 + 1y2 **>=** 1 Restriktion 3

x1, x3 >= 0

x2 Element R

* + Wenn in der primalen LP in den NB eine x-Variable ein Element reeller Zahlen ist, ist die dazugehörige Restriktion in der dualen LP eine Gleichung

Bsp.:

primale LP

max Z(x1, x2) = 3x1 + 2x2 + x3

Unter den Bedingungen

x1 + 2x2 - x3 <= 4 Restriktion 1

2x1 - x2 + x3 **=** 8 Restriktion 2

x1 - x2 <= 6 Restriktion 3

x1, x2 >= 0



duale LP

min ZD(y1, y2, y3) = 4y1 + 8y2 + 6y3

Unter den Bedingungen

1y1 + 2y2 +1y3 **>=** 3 Restriktion 1

2y1 - 1y2 – 1y3 **>=** 2 Restriktion 2

-1y1 + 1y2  **=** 1 Restriktion 3

x1, x3 >= 0

x2 Element R

**tabellarische Lösung zum Dualen Simplex-Algorithmus**

* Haben eine oder mehrere Restriktion in der primalen LP einen **>=** Operator ist die Ausgangslösung unzulässig

>= muss durch Multiplikation mit \* -1 in <= umgeformt werden

*Frage:*

*Wenn eine Restriktion der primalen LP in Grundform eine Gleichung ist, muss in <= umgestellt werden 🡆 ergibt aus 1 Restriktion 2 Restriktionen eine <= ohne vorzeichen-Änderung und eine <= mit Vorzeichen-Änderung*

Bsp.

primale LP

max Z(x1, x2) = 3x1 + 2x2 + x3

Unter den Bedingungen

x1 + 2x2 - x3 <= 4 Restriktion 1

2x1 - x2 + x3 **=** 8 Restriktion 2

x1 - x2 <= 6 Restriktion 3

ergibt

x1 + 2x2 - x3 <= 4 Restriktion 1

2x1 - x2 + x3 **<=** 8 Restriktion 2

-2x1 + x2 - x3 **<=** - 8 Restriktion 3

x1 - x2 <= 6 Restriktion 4

* Vorgehen zum Eintragen der x-Werte aus der Z-Funktion für die Z-Zeile in die Ausgangstabelle 0

Z-Zeile in der Ausgangstabelle:

Lösungswert = 0

Werte der x-Variablen sind negativ (- Vorzeichen)

* Vorgehen zum Eintragen der Restriktionswerte (= Werte der Schlupfvariablen y) und der dazugehörigen x-Werte für jede Restriktion in die Ausgangstabelle

Übernahme der Restriktionswerte und der Werte zu den x-Variablen unverändert aus der Grundform der primalen LP

* Vorgehen zum Ermitteln der Eintrittsvariablen x (= Pivotspalte) und Austrittsvariablen y (= Pivotzeile)

**Achtung:**

**Ab hier Unterschied zum Simplex-Verfahren ohne dualen Schritt**

**Eintrittsvariable x (= Pivotspalte) und Austrittsvariable y (= Pivotzeile) werden in umgekehrter Reihenfolge und nach einem entgegengesetzten Algorithmus als im Simplex-Verfahren ohne dualen Schritt ermittelt.**

**Zuerst wird die Austrittsvariable y (= Pivotzeile) und danach die Eintrittsvariable x (= Pivotspalte) ermittelt**

* Ermitteln der Austrittsvariablen y (= Pivotzeile)

Austrittsvariable y (= Pivotzeile) ist die Zeile mit negativem Schlupf (negativem Wert zu einer BV (y-Variablen) in der Lösungsspalte (Spalte 0))

* Ermitteln der Eintrittsvariablen x (= Pivotspalte)

**Unterschied zum Simplex-Algorithmus ohne dualen Schritt**

Es werden nur die Spalten zu den NBV-Variablen **(x-Variablen)** berücksichtigt, die einen **negativen Pivotwert** haben. Alles anderen Spalten werden nicht berücksichtigt

* Ermitteln des **größten Theta-Werts** (Unterschied zum Simplex-Algorithmus)aus der **Division des Werts aus der Z-Zeile (Zeile 0)** (Unterschied zum Simplex-Algorithmus) durch den negativen Pivot-Wert in der zuvor ermittelten Pivotzeile (Unterschied zum Simplex-Algorithmus)

Hinweis:

Unterschied zum Simplex-Algorithmus ohne dualen Schritt

Es wird der Wert aus der Z-Zeile durch den Wert der Pivotzeile dividiert. Im Simplex-Algorithmus ohne dualen Schritt wird der Wert aus der Lösungsspalte durch den Wert der Pivotspalte dividiert, dabei wird die Z-Zeile NICHT berücksichtigt

**Die Spalte mit dem größten Theta-Wert ist die Pivot-Spalte und ergibt die Eintrittsvariable und den Pivotwert**

* Tausch der NBV x aus der Pivotspalte gg. BV y aus der Pivotzeile
* Ermitteln des Pivotwerts aus Pivotspalte und Pivotzeile der x-Variablen (NBV) zur gewählten x-Variablen (Pivotspalte)
* Füllen der Pivotzeile (Kehrwert zum Pivotwert, Division der Zellenwerte aus der Pivotzeile durch ursprünglichen Pivotwert)
* Füllen der Pivotspalte (Division der Zellenwerte aus Pivotspalte durch ursprünglichen Pivotwert \* (-1)

Die Vorzeichen der Werte in der Pivotspalte bleiben in der 1. Iteration unverändert, da der Pivotwert negativ ist 🡆 Division des Zellenwerts durch negativem Pivotwert \* (-1) verändert das Vorzeichen nicht! (Unterschied zum Simplex-Algorithmus)

Ab hier wird wieder der Simplex-Algorithmus ohne dualen Schritt angewandt

* Füllen der übrigen Zellen in der Tabelle durch   
  Zellenwert – (Wert Pivotzeile aus Zellenspalte \* Wert Pivotspalte aus Zellenzeile : ursprünglichen Pivotwert)
* Es sollten nun alle Werte in der Lösungsspalte (Spalte 0) > 0 sein

Ab hier wird wieder der Simplex-Algorithmus ohne dualen Schritt angewandt

* 2. Iteration, wenn ein Zellenwert aus der Z-Zeile noch negativ (< 0 )  
  Das Verfahren ist beendet, wenn ALLE Werte aus der Z-Zeile positiv (>=0) sind
* 2. Iteration wird wie die 1. Iteration durchgeführt
  + Erstellen der Tabelle 2
  + **Auswahl Pivotspalte (Eintrittsvariable) mit dem größten negativen Wert**
  + **Auswahl Pivotzeile (Austrittsvariable) mit dem kleinsten Theta-Wert**
* beim Simplex-Algorithmus ohne dualen Schritt sind nur Pivotwerte > 0 zulässig

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | **PS** |  | Thetawert |
|  | Tabelle 1 | Lösungsspalte  (Spalte 0) | **y2** | x2 |  |
|  | Z | 12 | -2 | 5 |  |
|  | y1 | 7 | -1 | 4 | nicht berücksichtigen, da Pivotwert in PS < 0  (y2 < 0) |
|  | x1 | 6 | -1 | 3 |
| **PZ** | **y3** | 1 | **1** | -3 | 1 : 1 = 1 |
|  |  |  |  |  |  |

* + Bestimmen des Pivotwerts
  + Tausch NBV (x-Variable) gg. BV (y-Variable)
  + Kehrwert zum Pivotwert
  + Füllen der Pivotzeile (Zellenwert aus PZ : Pivotwert)
  + Füllen der Pivotspalte (Zellenwert aus PS : Pivotwert \* (-1))
  + Füllen der übrigen Zellen
* 3. Iteration, wenn ein Zellenwert aus der Z-Zeile noch negativ (< 0 )  
  Das Verfahren ist beendet, wenn ALLE Werte aus der Z-Zeile positiv (>=0) sind
* Ablesen der x-Werte und des Z-Wertes aus der Lösungsspalte (Spalte 0)
* Lösungssatz formulieren (alle Variablen mit \*)  
  „Die optimale Lösung ist x1\* = , x2\* = , Z\* =

Bsp.

max Z(x1, x2) = 10x1 + 2x2

Unter den Bedingungen

4x1 + x2 <= 10 Restriktion 1

2x1 + x2 <= 8 Restriktion 2

4x1 + x2 >= 3 Restriktion 3

x1, x2 >= 0.

* LP ist nicht in Grundform, da 3. Restriktion 4x1 +x2 >= 3 eine unzulässige Lösung ist

3. Restriktion 4x1 + x2 >= 3 durch Multiplikation mit \* (-1) in eine <= Restriktion umstellen

Grundform der primalen LP nach der Umstellung

max Z(x1, x2) = 10x1 + 2x2

Unter den Bedingungen

4x1 + x2 – 2x3 <= 10 Restriktion 1

2x1 + x2 <= 8 Restriktion 2

**-4x2 - x2 <= -3 Restriktion 3**

**x1, x2 >= 0**

primale LP ist wegen der Bedingung x1, x2 >= 0 und 4x1 + x2 in der 3. Restriktion unzulässig

Zur Umformung in eine zulässige Lösung ist der duale Simplex-Algorithmus erforderlich

In diesem Bsp. wird tabellarisch gelöst.

* Erstellen der Ausgangstabelle 0
* Bestimmen der Austrittsvariablen y (Pivotzeile) anhand des negativen Werts zur Schlupfvariablen y in der Lösungs-Spalte (Spalte 0)
* Bestimmen der Eintrittsvariablen x (Pivotspalte) **anhand des größten Thetatwerts aus der Division der x-Werte aus der Z-Zeile durch negativen Pivotwert aus der Pivotzeile** (Wert in der Pivotzeile muss < 0 sein, alle anderen Spalten interessieren nicht
* Bestimmen des Pivotwerts aus Pivotzeile und Pivotspalte

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | **Pivotspalte** |  | |
| Tabelle 0 | Lösungs-Spalte  (Spalte 0) | **x1** | x2 |  |
| Z | 0 | -10 | -2 |  |
| y1 | 10 | 4 | 1 |  |
| y2 | 8 | 2 | 1 |  |
| **y3** | **-3** | **-4** | -1 | Pivotzeile |
| Thetawert | | 10/4 = 2,50 | 2 |  |
|  | | größter Thetawert zu einem negativen Wert in der Pivotzeile |  | |

* **Pivotwert ist -4**
* Erstellen der Ausgangstabelle 1
* Tausch der x-Variablen gg. y-Variable

Tausch x1 gg. y3

* Füllen der Pivotzeile

Kehrwert zum Pivotwert 4 = ¼

Division der Zellenwerte aus Pivotzeile durch Pivotwert 4 (aus Tabelle 0)

-3 : - 4 = 3/4

-1 : -4 = ¼

* Füllen der Pivotspalte

Division der Zellenwerte aus Pivotzeile durch Pivotwert 4 (aus Tabelle 0) \* (-1)

Hinweis:

im Dualen Simplex-Algorithmus bleiben in der 1. Iteration die Vorzeichen der Zellenwerte aus der Pivotspalte der Tabelle 0 unverändert

-10 / -4 \* (-1) = -10/4

4 / -4 \* (-1) = 1

2 / -4 \* (-1) = 2/4

* **Füllen der übrigen Zellen**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | **Pivotspalte** |  | |  |  |
| Tabelle 1 | Lösungs-Spalte  (Spalte 0) | **y3** | x2 | Theta |  |  |
| Z | **7,5** | -10/4 | 1/2 | ---- |  |  |
| y1 | **7** | 1 | 0 | 7 : 1 = 7 |  |  |
| y2 | **13/2** | 2/4 | 1/2 | 13/2 : 2/4 = 13 |  |  |
| **x1** | **3/4** | **1/4** | 1/4 | 3/4 : 1/ 4 = 3 | kleinster Thetawert | Pivotzeile |
|  | | Pivotwert |  | |  |  |

* alle Werte in der Lösungsspalte (Spalte 0) sind jetzt > 0

Ab hier wird wieder der Simplex-Algorithmus ohne dualen Schritt angewandt

* 2. Iteration, wenn ein Zellenwert aus der Z-Zeile noch negativ (< 0 )
* Erstellen der Tabelle 2
* Bestimmen der Pivotspalte (Spalte mit größtem negativen Wert (kleinsten Wert))
* **Pivotspalte ist y3 (größter negativer Wert)**
* **Auswahl Pivotzeile (Austrittsvariable) mit dem kleinsten Theta-Wert**
* Bestimmen des Pivotwerts

**Pivotwert ist 1/4**

* Tausch y3 gg x1
* Kehrwert zum Pivotwert 1/4 = 4
* Füllen der Pivotzeile (Zellenwert aus PZ : Pivotwert)
* Füllen der Pivotspalte (Zellenwert aus PS : Pivotwert \* (-1))
* Füllen der übrigen Zellen

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | Pivotspalte |  | |  |  |
| Tabelle 2 | Lösungs-Spalte  (Spalte 0) | x3 | x2 | Theta |  |  |
| Z | 15 | 10 | 3 |  |  |  |
| y1 | 4 | -4 | 0 |  |  |  |
| y2 | 5 | -2 | 0 |  |  |  |
| y3 | 3 | 4 | 1 |  |  |  |
|  | | Pivotwert |  | |  |  |

Verfahren ist beendet

**hier ist ein Fehler, den ich nicht finde**

max Z(x1, x2) = 10x1 + 2x2

zur Lösungsspalte gibt es keine x-Werte

**obere Schranke einer LP**

Aufgabe

max Z(x1, x2) = 3x1 + 8x2

unter den Nebenbedingungen:

2x1 + 4x2 <= 1600 1. Restriktion

6x1 + 2x2 <=1800 2. Restriktion

x2 <=350 3. Restriktion

x1, x2 >= 0

Zeigen Sie, dass zweimal die erste Restriktion eine obere Schranke für Z mit dem Wert 3200 ergibt.

**Lösung:**

**1. Schritt: Zielfunktion und 1. Restriktion in eine Ungleichung bringen**

**Z= 3x1 + 8x2 <= 2x1 + 4x2 <= 1600**

**2. Schritt: Wenn der Faktor nicht (wie in der Aufgabenstellung mit „*zweimal*“) gegeben, muss der Faktor aus der Division aus Koeffizient der Z-Funktion durch Koeffzient der Bedingung pro X-Variable ermittelt werden.**

im Bsp. wäre das

Z= 3x1 + 8x2

2x1 + 4x2

für x1 3:2 = 1,5, für x2 8:4 = 2

Es wird dann der größte **Faktor** (**im Bsp**. also **2**) genommen.

In der Aufgabenstellung ist der **Faktor** jedoch mit „*zweimal*“ vorgegeben, es wird also der Faktor 2 genommen

**3. Schritt:** Vor der **Restriktion** wird der **Faktor 2 aus der Aufgabenstellung** gesetzt

**Z= 3x1 + 8x2 <= 2 \* (2x1 + 4x2) <= 1600**

**4. Schritt:** Für die Restriktion wird der **Restriktionswert** eingesetzt

**Z= 3x1 + 8x2 <= 2 \* 1600**

**Z= 3x1 + 8x2 <= 3200**

Zeigen Sie, dass 3/2 mal der erste Restriktion und zweimal der dritte Restriktion eine obere Schranke für Z mit dem Wert 3100 ergib

Lösungsweg wie in der 1. Aufgabe

**Lösung:**

**1. Schritt: Zielfunktion und 1. Restriktion und 3. Restriktion in eine Ungleichung bringen**

**Z= 3x1 + 8x2 <= 2x1 + 4x2 <= 1600 + x2 <=350**

**2. Schritt:** Vor der Restriktion wird der **Faktor 3/2** vor die 1. Restriktion und **Faktor 2** vor die   
 3. Restriktion aus der Aufgabenstellung gesetzt   
 **Z= 3x1 + 8x2 <= 3/2 \* (2x1 + 4x2) <= 1600 + 2 \* (x2) <= 350**

**4. Schritt:** Für die Restriktion wird der **Restriktionswert** eingesetzt

**Z= 3x1 + 8x2 <= 3/2 \* 1600 + 2 \* (x2) <= 350**

**Z= 3x1 + 8x2 <= 2400 + 700**

**Z= 3x1 + 8x2 <= 3100**

Was ist der Zielfunktionswert wenn x1 = 100, x2 = 350?

Ist dieser Punkt zulässig?

**Lösung**

Prüfen auf Gültigkeit

Werte für x1 und x2 in allen Restriktionen einsetzen und mit den Restriktionswert auf Gültigkeit prüfen

2 \* 100 + 4 \* 350 = 1600 <= 1600 Lösung ist gültig für 1. Restriktion

6 \* 100 + 2 \* 350 = 1300 <= 1800 Lösung ist gültig für 2. Restriktion

350 = 350 <=350 Lösung ist gültig für 3. Restriktion

Zielfunktionswert durch einsetzen der Variablenwerte berechnen

max Z(x1, x2) = 3 \* 100 + 8 \* 350

**Z = 3100**

**Primale Entartung erster Art**

bei Simplex-Algorithmus: Theta-Wert ist zu mehreren Pivotzeilen identisch

1. Schritt: 1. Zeile aus allen Zeilen mit dem kleinsten Theta-Wert wählen

2. Schritt. Wenn es nach dem 1. Schritt nur einen kleinsten Pivotwert gibt, mit Simplex-Algorithmus verfahren, wie gehabt, sonst wieder, wie im 1. Schritt

**duale Entartung**

mehrere Pivotspalten mit größtem negativen Wert (kleinstem Wert) in der Z-Zeile (2 Pivotspalten (Strukturvariablen) mit demselben Wert)

1. Schritt: Pivotspalte mit dem kleinsten Index wählen

2. Schritt. Wenn es nach dem 1. Schritt nur einen größten negativen Wert (kleinsten Wert) in der Z-Spalte gibt, mit Simplex-Algorithmus verfahren, wie gehabt, sonst wieder, wie im 1. Schritt

**primale Entartung zweiter Art**

nur Pivotwerte < 0 in der Pivotspalte mit kleinstem Wert (größten negativen Wert)

P ist unbeschränkt und besitzt keine zulässige Lösung

Abbruch des Verfahrens

**Freie Strukturvariablen**

x-Variable ist reelwertig und darf negativ sein

**WICHTIG (und auf den Spicker)**

alle möglichen Arten der Sonderfälle

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Sonderfall | Voraussetzung /  Bedingung | Algorithmus |
| unzulässige Ausgangslösung | Negativer Wert in der Lösungsspalte | aktuelle Lösung ist nicht zulässig   * Dualer Schritt * ist kein Pivotwert in einer der Pivotzeilen < 0, ist die Lösung unzulässig und das Verfahren bricht ab |
| Primale Entartung erster Art | 0-Wert in der Lösungsspalte (der 1. Lösungstabelle)  identischer Theta-Wert zu mehreren Zeilen mit positivem Pivotwert. | **seltenes Problem**  Algorithmus fortsetzen  Es könnte ein Problem in der Lösung geben, meist wird aber eine optimale Lösung ohne weiter Probleme gefunden  Aufpassen, dass man in der Lösung nicht wieder zurück auf den Ursprung kommt (Kreis) |
| duale Entartung | 0-Wert in der Z-Zeile  (der 1. Lösungstabelle)  2 Pivotspalten (Strukturvariablen) in der Z-Zeile mit demselben Wert |
| Primale Entartung zweiter Art | kein positiver Wert in allen Pivotzeilen einer Pivotspalte | **großes Problem**  LP ist unbeschränkt und besitzt keine zulässige Lösung |
| Freie Strukturvariablen | z. B. xj | Algorithmus fortsetzen  xj darf aber negativ sein |

**Transportproblem**

LP zum Transportproblem

zur Kostenminimierung

max Z (x11, x12, x13, x21, x22, x23) = - x11 - x12 - x13 - x21 - x22 - x23

x11 + x12 + x13 <= 15

- x11 - x12 - x13 <= -15

x21 + x22 + x23 <= 30

- x21 – x22 – x23 <= -30

…

Nordwest-Eckenregel für die Tabelle zur zulässigen Basislösung

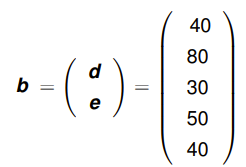
Austauschschritte zur Erstellung der Zieltabelle

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Transportkosten | | |  | |
|  | Warenhaus W1 | Warenhaus W2 | Warenhaus W3 | | Kapazität in Stk |
| Produktionsort P1 | x11 | x12 | x13 | | 40 |
| Produktionsort P2 | x21 | x22 | x23 | | 80 |
| Bedarf in Stk | 30 | 50 | 40 | |  |

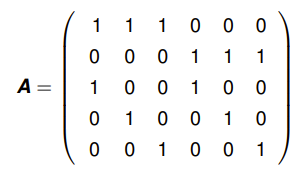
Restriktionen zur Kapazität (40, 80) in Vektor d

Restriktionen zum Bedarf (30, 50, 40) in Vektor e

Vektor d und Vektor e werden in Vektor b gespeichert



Matrix A enthält in jeder Zeile die bits (1, 0) für die Restriktionen



jede Matrix-Zeile steht für 1 Restriktion

1. Zeile für Kapazität 40

1x11 + 1x12 + 1x13 + 0x21 + 0x22 + 0x23 = 40

2. Zeile für Kapazität 80

0x11 + 0x12 + 0x13 + 1x21 + 1x22 + 1x23 = 80

3. Zeile für Bedarf 30

1x11 + 0x21 + 0x11 + 121 + 0x11 + 0x21 = 30

4. Zeile für Bedarf 50

0x12 + 1x22 + 0x12 + 022 + 1x12 + 0x22 = 50

5. Zeile für Bedarf 40

0x13 + 0x23 + 1x13 + 023 + 0x13 + 1x23 = 4

Matrix ist unimodular

Matrixspalte hat Koeffizienten -1, 0 und 1

höchstens 2 Koeffizienten != 0 (1 oder -1)

Delta zwischen 2 Zeilenindexmengen mit 2 Koeffizienten, die nicht 0 sind ist 0)

Wichtig, weil eine TP immer eine unimodulare Matrix ist und immer eine ganzzahlige Lösung ergibt

**Sensitivitätsanalyse**

**Sensitivitätsanalyse**

* bewertet, **wie empfindlich (oder stabil) die Optimallösung zu der Modellspezifizierung der LP ist**.
* **Wie viel darf sich ein Restriktionswert ändern, ohne die optimale Basislösung zu verändern**?
* **Wie viel darf sich die Zielfunktionskoeffizienten ändern, ohne die optimale Basislösung zu verändern?**
* **Wie viel verändert sich die optimale Lösung bei einer Änderung eines Restriktionswerts** (Schattenpreis)?

**Schattenpreis**:

**Schattenpreis ist die Zunahme des Zielfunktionswerts Z\* der optimalen Lösung bei ∆ = 1**

**der Restriktionswert erhöht sich um 1 Einheit solange die neue optimale Lösung dieselbe optimale Basislösung hat.**

Nimmt Restriktion bj um bj = + ∆ zu, ändert sich der Zielfunktionswert Z (neu) auf Z\* + Sj∆

Sj ist der Schattenpreis solange die neue optimale Lösung dieselbe Basislösung hat

**Ist eine Nichtbasis-Schlupfvariable == 0 🡆 ist entsprechende Restriktion verbindlich, eine Erhöhung des Restriktionswerts erhöht optimalen Zielfunktionswert**.

**Basis-Schlupfvariable (BV) hat einen Schattenpreis == 0, weil die Restriktion unverbindlich ist.**

**Mehr Ressourcen für diese Restriktion bringen nur mehr Schlupf und keinen zusätzlichen Gewinn.**

**Schattenpreis muss positiv sein, sonst ist die Lösung nicht optimal**

**methodisches Vorgehen zur Ermittlung des neuen Zielfunktionskoeffizienten und der neuen Restriktionswerte ohne Veränderung der Basislösung**

gegeben sind die Tableaus Tab0, Tab1 und Tab2 mit den Werten für die optimale Basislösung

🡆 das bedeutet, dass auch die Werte für x\*1, x\*2, x\*3 und Z\* zur optimalen Basislösung gegeben sind.

Die Aufgabe besteht darin, für eine der Restriktionen einen Wertebereich zu bestimmen, in dem die Restriktion geändert werden kann, ohne die optimale Basislösung zu verändern

Bsp.

LP in Grundform

maximiere Z = 4x1 + 2x2 + x3

unter den Nebenbedingungen:

x1 + x2 <= 4 := b1 |

x1 + x3 <= 6 := b2 ||

x2 + x3 <= 8 := b3 |||

x1, x2, x3 >= 0

LP in Normalform

maximiere Z = 4x1 + 2x2 + x3

unter den Nebenbedingungen:

x1 + x2 + y1= 4

x1 + x3 + y2 = 6

x2 + x3 + y3 = 8

x1, x2, x3, y1, y2, y3 >= 0

Aufgabe

Bestimmen Sie Tab2, wenn b1 = 4 + **∆**

zum besseren Verständnis könnte man die LP in Grundform mit den Anforderung b1 = 4 + **∆** wie folgt schreiben

maximiere Z = 4x1 + 2x2 + x3

unter den Nebenbedingungen:

x1 + x2 <= 4 + **∆** b1

x1 + x3 <= 6 b2

x2 + x3 <= 8 b3

x1, x2, x3 >= 0

Wenn nicht in der Aufgabenstellung gefordert, ist das aber nicht nötig

Zur Lösung der Aufgabe wird das Tableau Tab0 unverändert übernommen

In der Tabelle Tab0 wird in Zeile 1 für die Variable y1 (diese repräsentiert die Restriktion b1) der Wert aus der Aufgabenstellung (im Bsp. 4 + **∆**) eingetragen

Lautet die Aufgabenstellung: Bestimmen Sie Tab2, wenn b1 = 4.1 wird in Tab0 zu y1 = 4.1 eingetragen

Die Tableaus Tab1 und Tab2 werden OHNE die Werte aus der Lösungsspalte übernommen.

**Für die Tableaus Tab1 und Tab2 müssen die Werte in der Lösungsspalte berechnet werden.**

**Tableaus zur optimalen Lösung Tableaus aus der Lösung ohne Werte in**

**aus der Aufgabenstellung der Lösungsspalte**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab0 | | x1 | x2 | x3 |
| Z | 0 | -4 | -2 | -1 |
| y1 | 4 | **1** | 1 | 0 |
| y2 | 6 | 1 | 0 | 1 |
| y3 | 8 | 0 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab0 | | x1 | x2 | x3 |
| Z | 0 | -4 | -2 | -1 |
| y1 | 4 + **∆** | **1** | 1 | 0 |
| y2 | 6 | 1 | 0 | 1 |
| y3 | 8 | 0 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab1 | | y1 | x2 | x3 |
| Z | 16 | 4 | 2 | -1 |
| x1 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| y2 | 2 | -1 | -1 | **1** |
| y3 | 8 | 0 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab1 | | y1 | x2 | x3 |
| Z |  | 4 | 2 | -1 |
| x1 |  | 1 | 1 | 0 |
| y2 |  | -1 | -1 | **1** |
| y3 |  | 0 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab2 | | y1 | x2 | y2 |
| Z | 18 | 3 | 1 | 1 |
| x1 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| x3 | 2 | -1 | -1 | 1 |
| y3 | 6 | 1 | 2 | -1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab2 | | y1 | x2 | y2 |
| Z |  | 3 | 1 | 1 |
| x1 |  | 1 | 1 | 0 |
| x3 |  | -1 | -1 | 1 |
| y3 |  | 1 | 2 | -1 |

**WICHTIGER Hinweis**

Ist die Zeile zum geänderten Restriktionswert yj + **∆** KEINE Pivotzeile (= Austrittsvariable) können die Werte aus Tab1 bzw. Tab2 aus der Lösungsspalte unverändert übernommen werden, da bei der Ermittlung des Werts in der Lösungsspalte die Pivotzeile nicht involviert ist.

Bsp.

Wäre die Aufgabenstellung Bestimmen Sie Tab2, wenn b2 = 6 + **∆**

könnte Tab1 unverändert aus der optimalen Lösung (Ausgangssituation) übernommen werden.

Nur der Lösungswert in der Pivotzeile muss neu ermittelt werden

In Tab1 wird die Zeile mit der **∆**-Restriktion aus der aus der optimalen Lösung (Ausgangssituation) übernommen und um **∆** erweitert.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab0 | | x1 | x2 | x3 |
| Z | 0 | -4 | -2 | -1 |
| y1 | 4 | **1** | 1 | 0 |
| y2 | 6 | 1 | 0 | 1 |
| y3 | 8 | 0 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab0 | | x1 | x2 | x3 |
| Z | 0 | -4 | -2 | -1 |
| y1 | 4 | **1** | 1 | 0 |
| y2 | 6 + **∆** | 1 | 0 | 1 |
| y3 | 8 | 0 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab1 | | y1 | x2 | x3 |
| Z | 16 | 4 | 2 | -1 |
| x1 | *4* | 1 | 1 | 0 |
| y2 | **2** | -1 | -1 | 1 |
| y3 | 8 | 0 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab1 | | y1 | x2 | x3 |
| Z | 16 | 4 | 2 | -1 |
| x1 | *4* | 1 | 1 | 0 |
| y2 | **2+ ∆** | -1 | -1 | 1 |
| y3 | 8 | 0 | 1 | 1 |

**Hinweis zum Rechnen**

Die Koeffizienten ohne **∆** vor der Klammer werden getrennt von den Koeffizienten mit **∆** berechnet

Das – vor der Klammer wird auch bei Ermittlung des **∆** Werts berücksichtigt, auch wenn vor der Klammer kein **∆** Wert notiert ist

Bsp.

0 – (4 + **∆** \* (-4) : 1)

= 0 – (4 \* (-4) : 1) = 16

= – (**∆** \* (-4) : 1) = + 4**∆**

= 16 + 4**∆**

6 – (4 + **∆** \* 1 : 1)

= 6 – (4 \* 1 : 1) = 2

= – (**∆** \* 1 : 1) = - **∆**

= 2 - **∆**

**vollständige Lösung zur Aufgabe** Bestimmen Sie Tab2, wenn b1 = 4 + **∆**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab0 | | x1 | x2 | x3 |
| Z | 0 | -4 | -2 | -1 |
| y1 | **4 + ∆** | **1** | 1 | 0 |
| y2 | 6 | 1 | 0 | 1 |
| y3 | 8 | 0 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab1 | | y1 | x2 | x3 |
| Z | 16 + 4**∆** | 4 | 2 | -1 |
| x1 | 4 + **∆** | 1 | 1 | 0 |
| y2 | **2 - ∆** | -1 | -1 | **1** |
| y3 | 8 | 0 | 1 | 1 |

Schattenpreise

b1 ( = y1 ) = 3

b2 ( = y2 ) = 1

b3 ( = y3 ) = 0

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab2 | | **y1** | x2 | y2 |
| Z | **18 + 3∆** | **3** | 1 | **1** |
| x1 | 4 + **∆** | **1** | 1 | 0 |
| x3 | 2 - **∆** | **-1** | -1 | 1 |
| y3 | 6 + **∆** | **1** | 2 | -1 |

**Hinweis zum Rechnen**

Die Koeffizienten ohne **∆** vor der Klammer werden getrennt von den Koeffizienten mit **∆** berechnet

Das – vor der Klammer wird auch bei Ermittlung des **∆** Werts berücksichtigt, auch wenn vor der Klammer kein **∆** Wert notiert ist

**Bsp. zur Berechnung des Z-Werts für Tab2 anhand der Werte aus Tab1**

Z-Wert in Tab1 = 16 + 4∆

Wert in Pivotzeile = 2 - ∆

Wert in Pivotspalte = **-1**

16 + 4∆ - (2 - ∆ \* (-1) : 1)

= 16 – (2 \* (-1) : 1)

= 18

= 4∆ - ( -∆ \* (-1) : 1)

= 3**∆**

Z = **18 + 3∆**

**WICHTIG:**

**Solange alle Werte in der ersten Spalte (Lösungsspalte) positiv bleiben, erreicht man dieselbe Basislösung.**

Die Werte zur Nichtbasis-Schlupfvariable für die zu ändernde Restriktion (im Bsp. Werte aus der 1. Spalte zur NBV y1 für die Restriktion   
(Aufgabenstellung war: Bestimmen Sie Tab2, wenn b1 = 4 + **∆**) müssen den **∆**-Werten aus der Lösungsspalte (Spalte 0) entsprechen (im Bsp. 3 für den Z-Wert, 1 für y1, -1 für y2, 1 für y3 )

Die Schattenpreise können aus Tab2 ausgelesen werden

Zu allen NBV (im Bsp. zu y1 und y2 ) ist der Schattenpreis = dem Wert aus den Spalten 1 bis 3 der Tab2

🡆 Schattenpreis für b1 ( =y1 ) = 3

🡆 Schattenpreis für b2 ( = y2 ) = 1

ACHTUNG:

🡆 Schattenpreis für b3 ( = y3 ) = 0 🡆 da y3 eine BV ist (Basis-Schlupfvariable (BV) hat einen Schattenpreis == 0, weil die Restriktion unverbindlich ist)

In der Aufgabenstellung ist meist der Wertebereich für **∆** und für die Restriktion (im Bsp. b1) gefragt.

Meist in der Form

Bestimmen Sie den Wertebereich für **∆** , in dem die gleiche Basislösung optimal ist

und

Bestimmen Sie den Wertebereich für b1 , in dem die gleiche Basislösung optimal ist

Wenn der Wertebereich für die Nichtbasisschlupfvariable mit der zu ändernden Restriktion (im Bsp. die Schlupfvariable y1 für die Restriktion b1 ) gefragt ist, werden die Werte aus der Lösungsspalte als Ungleichung mit >= 0 notiert (die **∆**-Werte aus der Lösungsspalte sind ja identisch mit den Werte aus der Spalte zur Schlupfvariablen der gefragten Restriktion)

Der Wert aus der Lösungsspalte zur Z-Zeile wird nicht berücksichtigt

Es interessieren nur die Werte ab Zeile 1

im Bsp. also

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab2 | | **y1** | x2 | y2 |
| Z | 18 + 3∆ | **3** | 1 | 1 |
| x1 | **4 + ∆** | **1** | 1 | 0 |
| x3 | **2 - ∆** | **-1** | -1 | 1 |
| y3 | **6 + ∆** | **1** | 2 | -1 |

4 + **∆** >= 0

2 - **∆** >= 0

6 + **∆** >= 0

Nach ∆ umstellen und ∆ so auflösen, dass ∆ kein Vorzeichen hat

4 + **∆** >= 0 = 4 >= -∆ = -4 <= ∆

2 - **∆** >= 0 = 2 >= ∆

6 + **∆** >= 0 = 6 >= -∆ = -6 <= ∆

**Hinweis:**

Hat ∆ ein + als Vorzeichen (z. B. 4 + **∆**) drehen sich alle Vorzeichen und aus >= wird <=

Hat ∆ einen Koeffizienten (z. B. 6∆) muss der Wert zur Schlupfvariablen durch den Koeffizienten dividiert werden

z. B.

4 + 6**∆** >= 0 = 4:6 >= -∆ = 0,666 <= -∆ = -0,666 <= ∆

Delta hat also die Wertebereiche

-4 <= ∆

2 >= ∆

-6 <= ∆

Daraus wird der Wertebereich gewählt, zu dem alle Bedingungen noch zutreffen

Das ist -4 <= ∆ <= 2

Begründung.

-4 ist im Wertebereich von -6 (-4 <= ∆ und -6 <= ∆) aber -6 ist nicht mehr im Wertebereich von -4 (-6 ist kleiner als -4)

-4 ist im Bereich von 2 (2 >= ∆ und -4 <= ∆)

zur Bestimmung des Wertebereichs für die Schlupfvariable y1 wird der Wert aus der Restriktion eingesetzt

(in der Aufgabe: x1 + x2 <= 4 + **∆** )

4 + (-4) = 0

4 + 2 = 6

Der Wertebereich für b1 ist somit

0 <= b1 <= 6

Ist der Wertebereich für eine Nichtbasis-Schlupfvariable, ohne zu ändernde Restriktion (also ohne ∆-Wert) gefragt (z. B. zu y2 müssen die Wert aus der Lösungsspalte OHNE ∆-Werte und die Werte aus der Spalte zur NBV in die Ungleichung >= 0 notiert werden.

Bsp.:

Bestimmen Sie den Wertebereich für b2 , in dem die gleiche Basislösung optimal ist

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab2 | | y1 | x2 | **y2** |
| Z | 18 + 3∆ | 3 | 1 | **1** |
| x1 | 4 + ∆ | 1 | 1 | **0** |
| x3 | 2 - ∆ | -1 | -1 | **1** |
| y3 | 6 + ∆ | 1 | 2 | **-1** |

4 >= 0

2 + **∆** >= 0

6 - **∆** >= 0

Nach ∆ umstellen und ∆ so auflösen, dass ∆ kein Vorzeichen hat

4

2 + **∆** >= 0 = 2 >= -∆ = -2 <= ∆

6 + **∆** >= 0 = 6 >= ∆

Der Wertebereich für ∆ ist

-2 <= ∆ <= 6

Wertebereich für b2

für b2 wird wieder der Wert aus der 2 Restriktion (b2) eingesetzt

x1 + x3 + y2 = 6

6 + (-2) = 4

6 + 6 = 12

Der Wertebereich für b2 ist somit

4 <= b2 <= 12

Hinweis:

Werden zum Wertebereich nur Werte <0 ermittelt, wird der größte Wert (der kleinste negative Wert) genommen und die Lösung für ∆ ist

Das Intervall für ∆ ist >= {WERT} und nach oben unbeschränkt

z. B.

4 + **2∆** >= 0 -2 <= ∆

3 + **∆** >= 0 -3 <= ∆

6 + **∆** >= 0 -6 <= ∆

Das Intervall für ∆ ist >= -2 und nach oben unbeschränkt.

Werden nur Wertebereiche >0 ermittelt, wird der kleinste Wert genommen und die Lösung für ∆ ist

Das Intervall für ∆ ist <= {WERT} und nach unten unbeschränkt

z. B.

4 - **2∆** >= 0 2 >= ∆

3 - **∆** >= 0 3 >= ∆

6 - **∆** >= 0 6 >= ∆

Das Intervall für ∆ ist <= 2 und nach unten unbeschränkt.

Ist der Wertebereich für eine Basisschlupfvariable gefragt, wird aus der Lösungsspalte der Wert zur Schlupfvariablen genommen   
(Ist die Schlupfvariable eine BV ist die Restriktion unverbindlich und hat den Schattenpreis 0)

Bsp.

Bestimmen Sie den Wertebereich für b3 , in dem die gleiche Basislösung optimal ist

x2 + x3 <= 8 b3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab2 | | y1 | x2 | y2 |
| Z | 18 + 3∆ | 3 | 1 | 1 |
| x1 | 4 + ∆ | 1 | 1 | 0 |
| x3 | 2 - ∆ | -1 | -1 | 1 |
| y3 | **6 + ∆** | 1 | 2 | -1 |

6 + ∆ >= 0 = -6 <= ∆

Das Intervall für ∆ ist >= -6 und nach oben unbeschränkt.

b3 ist >= 8 + (-6)

b3 ist >= 2

Das Intervall für b3 >= 2 und nach unten unbeschränkt.

**Änderung der Zielfunktion bei Änderung eines Nichtbasisvariablen-Koeffizienten**

**x2 ist eine NBV**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab 2 | | y1 | x2 | y2 |
| Z | 18 | 3 | 5 | 1 |
| x1 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| x3 | 2 | -1 | -1 | 1 |
| y3 | 6 | 1 | 2 | -1 |

optimale Basislösung ist: **max Z(x1, x2, x3) = 4x1 + 2 x2 + x3**

z. B.

**x2 verändert sich von 2 auf 2+δ**

dann gilt z(neu) = 4x1 + **(2 + δ) x2** + x3

* δ wird von dem z-Zeile-Eintrag in der x2 Spalte subtrahiert.

**Der neue Z-Zeile ist jetzt**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Tab 2 | | y1 | x2 | y2 |
| Z | 18 | 3 | **5-δ** | 1 |

Wichtig:

Alle Bedingungen

y1 >= 0

x2 >= 0

y2 >= 0

müssen wieder erfüllt sein

5 − δ >= 0 🡆 δ <= 5

unbeschränkt nach unten

c2 neu = c2 + δ

c2 + 5

c2 <= 7

δ kann auch <= 0 sein

Die optimale Basislösung bleibt erhalten, solange c2 <= 7

**Z-Wert ändert sich bei Änderung eines NBV-Koeffizienten nicht, da NBV in der Zielfunktion zur optimalen Lösung mit 0 bewertet werden**

**Die neue optimale Lösung bleibt somit unverändert!**

x2 hat zwar den Wert 2 + δ 🡺 d. h., wenn δ = 7 dann ändert sich die ZF in

**max Z(x1, x2, x3) = 4x1 + 7 x2 + x3**

ABER

δ ist eine NBV und wird mit 0 bewertet

die neue optimale Lösung zu obigem Endtableau ist daher

x1\* = 4

x2\* = 0 (obwohl sich der Koeffizient geändert hat)

x3\* = 2

Z\* = 18

Bweis:

**max Z(x1, x2, x3) = 4x1 + 7x2 + x3**

**max Z(x1, x2, x3) = 4 \* 4 + 7 \* 0 + 2**

**max Z(x1, x2, x3) = 16 + 2 = 18**

**Ganzzahlige Optimierung**

**Die Gomory-Schnitt-Ungleichung hängt nur von Nichtbasisvariablen ab, und kann somit leicht als eine neue Zeile des Tableaus hinzugefügt werden**

Gomory-Schnitt zum Tableau einschließlich der neuen Schlupfvariablen s1 hinzufügen

**Simplex-Algorithmus muss mit dualem Simplex-Schritt fortgeführt werden, da Lösungswert der Gomory-Schnitt-Zeile negativ ist. Die neue Zeile ist die Pivotzeile.**

**Bsp:**

Bsp.

Geg ist folgende LP:

max Z(x1, x2) = 4x1 + 8x2

unter den NB

x1 + 4x2 <= 12

8x1 - 2x2 <= 20

* Bei der Ermittlung der Koeffizienten für den G-Schnitt (= NK-Stellen zu den Strukturvariablen (Basisvariablen) x1 und x2 ist immer die Variable (Zeile) mit dem höchsten Bruchanteil zu nehmen  
  wenn x1 = 3,60, x2 = 2,80 wird die x2 – Zeile genommen (0,80 > 0,60)  
  wenn x1 = 5/9, x2 = 3/8, wird die x1 – Zeile genommen (0,55 > 0,38)

Endtableau

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tab2 | | y1 | y2 |
| Z | 1,5 | 0,25 | 0,25 |
| x1 | 3,60 | 0,16 | -0,16 |
| **x2** | **2,80** | **0,25** | **- 0,25** |

oder als Bruchzahlen

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tab2 | | y1 | y2 |
| Z | 1 ½ | ¼ | ¼ |
| x1 | 3 3/5 | 1/6 | -1/6 |
| **x2** | **2 4/5** | **¼** | **- ¼** |

* aus dem Tableau werden die **Nachkomma-Werte** aus der Zeile zur Strukturvariablen (Basisvariablen x-Variablen) mit dem kleinsten Bruchanteil = x2 genommen und mit der Schlupfvariablen S1 in eine neue Tab G1 eingetragen  
    
  NK-Werte für Schlupfvariable S1 bestimmen  
  bei positiven Werten: Nachkomma-Wert \*-1   
  z. B. y1 = 1/4 🡺 - 1/4  
  bei negativen Werten: 1 – Nachkomma-Wert \*-1   
  z. B. y2 = - 1/4 🡺 1 – 1/4 \* -1 = - 3/4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tab G1 | | y1 | y2 |
| Z | 1 ½ | ¼ | ¼ |
| x1 | 3 3/5 | 1/6 | -1/6 |
| x2 | 2 4/5 | ¼ | - ¼ |
| **S1** | **-4/5** | **-¼** | **- ¾** |

dualer Schritt mit Simplex-Algorithmus tabellarisches Verfahren (Tauschen der Variablen nicht vergessen!

Tausch y2 gegen S1)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tab G2 | | y1 | S1 |
| Z | -1 3/4 | 1/3 | 1/3 |
| **x1** | **3 7/9** | **2/9** | **- 2/9** |
| x2 | 3 | 1/6 | -1/3 |
| y2 | 1 | 1/3 | - 4/3 |

**Der G-Schnitt wird so oft wiederholt, bis alle Werte in der lösungsspalte ganzzahlig sin.**

**Dier Werte in der Lösungsspalte müssen positiv sein!**

**Falls Ungleichung zum G-Schnitt gefragt ist**

* aus dem Tableau werden die **Nachkomma-Werte** aus der Zeile zu der zuvor ermittelten Strukturvariablen (Basisvariablen x-Variablen) mit dem kleinsten Bruchanteil in eine Gleichung mit neuer Schlupfvariablen S1 geschrieben  
  bei positiven Werten der Nachkomma-Wert \*-1   
  z. B. y1 = 0,25 🡺 - 0,25  
  bei negativen Werten der 1 - Nachkomma-Wert \*-1   
  z. B. y2 = - 0,25 🡺 1 - 0,25 \* -1 = - 0,75

Die Gleichung:

**S1 – 0,25y1 – 0,75y2 = - 0,88**

Danach sind die Gleichungen zu den Schlupfvariablen aus den Restriktionen zu notieren

x1 + 4x2 +y1 = 12

y1 = **12 - x1 - 4x2**

8x1 - 2x2 + y2 = 20

y2 = **20 - 8x1 + 2x2**

Zuletzt die Werte (Terme) zu y1 und y2 in die Gleichung zum G-Schnitt einsetzen und lösen

**S1 – 0,25 \* (12 - x1 - 4x2) – 0,75 \* ( 20 - 8x1 + 2x2 ) = -0,88**

S1 -18 + 6,25 x1 - 0,5 x2 = -0,88 | +18

S1 + 6,25x1 – 0,5 x2 = 17,12

**als Ungleichung**

**6,25x1 – 0,5 x2 <= 17,12**

**Branch-And-Bound-Verfahren**

**Regeln**

1).

Ist die Lösungsmenge der Zielwertfunktion leer (= unzulässige Lösung) 🡺 Breche das Traversieren in diesem Branch ab

2.)

Haben alle Strukturvariablen in der Zielwertfunktion ganzzahlige Werte 🡺 Breche das Traversieren in diesem Branch ab

3.)

Hat mindestens eine der Strukturvariablen in der Zielwertfunktion einen gebrochenen Wert UND ist die Lösung der Zielwertfunktion <= als die bisher gefundenen untere Schranke 🡺 Breche das Traversieren in diesem Branch ab

Erklärung: die Zielwertfunktion ist eine Maximierungsfunktion und das Branch-And-Bound-Verfahren ist ein Maximierungsproblem. Die Zielwertfunktion liefert immer den Maximum-Wert. Das heißt, alle weiteren Zielwertfunktionen in diesem Branch würden mit der optimalen Basislösung (den Zielfunktionskoeffizienten der Basislösung) weiterrechnen und keine Lösung liefern, deren Zielfunktionswert größer ist, als der Wert des aktuell betrachteten Problems).

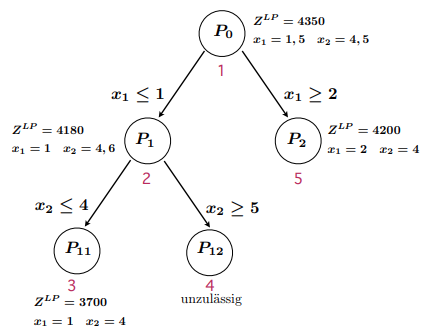
4.)

Hat mindestens eine der Strukturvariablen in der Zielwertfunktion einen gebrochenen Wert UND ist die Lösung der Zielwertfunktion > als die bisher gefundenen untere Schranke 🡺 werden in diesem Branch zum aktuellen Problem 2 neue Unterprobleme (UP) definiert. Jedes dieser UP hat als zusätzliche Bedingung jeweils eine zusätzliche Nebenbedingung. Im 1. UP prüft die NB auf <= zum abgerundeten ganzzahligen Wert der Strukturvariablen aus dem vorausgehenden Problem.

Im 2. UP prüft die NB auf >= zum aufgerundeten ganzzahligen Wert der Strukturvariablen aus dem vorausgehenden Problem

5.)

Wurden in einem Branch alle UPs bearbeitet, sind alle offenen Probleme in anderen Branches abzuarbeiten, bis alle Probleme bearbeitet wurden.



in der LP-Relaxierung sind P0 sind x1 = 1,5 und x2 = 4,5

Beide Variablen haben gebrochene Werte.

Man muss sich für das weitere Vorgehen für X1 ODER für X2 entscheiden.

Im Beispiel wurde sich für x1 entschieden

Zu x1 werden die Unterprobleme P1 und P2 erstellt.

In P1 gibt es die zusätzliche Bedingung x1 <= 1

In P2 gibt es die zusätzliche Bedingung x1 >=2

Man muss sich für eines der UP P1 ODER P2 entscheiden

Im Beispiel wurde sich für P1 entschieden

Der Zielfunktionswert in P1 liefert zur Variablen x2 = 4,6 einen gebrochenen.

Es werden die 2 neuen UP P11 und P12 erstellt

In P11 gibt es die zusätzliche Bedingung x2 <= 4

In P2 gibt es die zusätzliche Bedingung x2 >=5

Man muss sich für eines der UP P11 ODER P12 entscheiden

Im Beispiel wurde sich für P11 entschieden

In der Zielwertfunktion P11 sind alle Variablen ganzzahlig. In diesem Branch muss nicht weiter gesucht werden

Nächstes UP P12 liefert eine leere Menge, also wird die Suche auch in diesem Branch abgebrochen.

Bleibt noch der Branch zum UP P2.

Die Variablen in der Lösung zum UP sind alle ganzzahlig und der Zielfunktionswert ist größer als die bisher gefundenen unter Schranke

**klausurrelevant**

* **LP** 
  + **LP in Grundform**
  + **Was ist Grundform, Zweck)**
  + **grafische Lösung**
  + **Was ist Schlupf**
* **naiver Algorithmus mit LGS**
* **Simplex-Algorithmus**
  + **LP in Normalform**
  + **Was ist Normalform, Zweck)**
  + **Simplex-Algorithmus mit LGS**
  + **Simplex-Algorithmus tabellarische Lösung**
  + **dualer Schritt**
* **duale LP und primale LP**
* **Sonderfälle**
  + **Welche, wann, welche Probleme können damit auftreten?**
* **Transportproblem**
* **Sensitivitätsanalyse**
  + **Was ist Sensitivitätsanalyse**
  + **Was ist Schattenpreis**
  + **Sensitivitätsanalyse bei Änderung des Restriktionswerts**
  + **Sensitivitätsanalyse bei Änderung des Zielfunktionskoeffizienten**
* **ganzzahlige Programmierung**
  + **Gomory-Schnitt**
  + **Branch and Bound**

obere Schranke ist kein Thema

Zur Klausur mitbringen

* Studentenausweis
* PA-Ausweis
* Lesebrille
* Taschenrechner
* Schreibblock, kariert
* Lineal
* Bleistifte
* Radiergummi
* Bleistiftanspitzer
* 2 Füller
* Tintenkiller
* Korrektur-Pen
* Fineliner
* Taschentücher
* Tintenpatronen
* Spicker
* Textmarker, verschiedene Farben
* Büroklammern
* Klarsichthüllen
* Aktendulli